**Лекция 16 Повторные производные и их применение**

16.1 Повторные производные

М16.1.1 Определение. *Второй производной* функции  называется производная от ее производной: .

М16.1.2 Определение. Производной порядка  называется производная от производной порядка .

М16.1.3Пример 1 . Найти третью производную .







М16.1.4 Пример 2 Найти вторую производную параметрически заданной функции .

По определению вторая производная есть производная от производной (первой производной). Первая производная была найдена выше: . .

Вторая производная равна:.

М16.1.5 Пример 3 Найти вторую производную неявной функции 

Найдем сначала первую производную: ; . Тогда . Избавимся теперь от  в выражении для второй производной: .

М16.1.6Пример 4 Найти общую формулу для производных любого порядка функций , , , , 

А) 

,  , 



Б) 

, , , , 



В) 

, , 



В частности, 

Г) 

, 





Д) 

, 





М16.1.7Формула Лейбница

Пусть , тогда , 



Нетрудно также вычислить, что

.

Видно (и это нетрудно доказать), что коэффициенты при произведениях производных те же, что и в формуле бинома Ньютона, поэтому



Найдем при помощи формулы Лейбница производную :



16.2 Правило Бернулли-Лопиталя

**М16.2.1 Теорема (Правило Бернулли-Лопиталя)**

1) Если функции  и определены на промежутке , имеют на этом промежутке конечные производные, 

и  для некоторой точки , то



2) Если функции  и определены на промежутке , имеют на этом промежутке конечные производные, ,  для некоторой точки  и , то



*Доказательство*: 1) Поскольку функции  и  имеют на

промежутке производные, они непрерывны на этом промежутке и

 и .

Тогда . Обозначив ,

получим ,

что и требовалось.

Полагая , получим, что при  переменная  будет стремиться к нулю.

Тогда .

*Теорема доказана.*

*Замечание*: доказанная теорема позволяет избавляться от неопределенности вида  под знаком предела.

**М16.2.2 Пример.** Вычислить предел 

При подстановке  под знак предела, получим неопределенность вида .

Применим правило Бернулли-Лопиталя: . Подставляя  под знак предела, снова получим неопределенность вида . Снова применим правило Бернулли-Лопиталя: .

Рассмотрим неопределенности других видов:

**М 16.1. 3 Неопределенность вида :**

, тогда .

Дробь  представляет собой неопределенность вида , значит при вычислении пределов, под знаком которых находится неопределенность вида , можно применять тот же метод, что и в предыдущем примере.

**М16.2.4 Пример.**  .

**М16.2.5 Неопределенность вида :**

Пусть , а , тогда  или ,

т.е. в первом случае получаем неопределенность вида , во втором - .

**М16.2.6 Пример.** 



**М16.2.7 Неопределенности видов , , :**

Рассмотрим предел  и пусть , а .

Рассмотрим вспомогательный предел . Под знаком последнего предела находится уже знакомая неопределенность вида . Предположим, что , тогда, очевидно, что .

**М16.2.8 Пример 1 (второй замечательный предел):** 

Рассматриваем предел . Под знаком этого предела –

неопределенность вида , значит можно применять правило Бернулли-Лопиталя: .

Значит, как и следовало ожидать, .

Можно привести иную форму второго замечательного предела:



Замена  в выражении  приводит к уже известной форме второго замечательного предела .

**М16.2.9 Пример 2.** 

Рассматриваем предел . Значит, .

**М16.2.10 Неопределенность вида **

Рассмотрим вспомогательный предел , под знаком которого находится неопределенность вида . Если , то .

**М16.2.11 Пример 3.** 

Рассматриваем предел . Значит, .

16.3 Монотонность

М16.3.1 Теорема (аналитический признак монотонности)

Пусть функция  имеет производную на промежутке , тогда:

1. Если функция  возрастает на этом промежутке, то для любого значения  
2. Если функция  убывает на этом промежутке, то для любого значения  

*Доказательство:* Пусть функция  возрастает. Если , то  и . По теореме о пределе и неравенствах , т. е. . Если , то  и снова . По теореме о пределе и неравенствах , т. е. .

Пусть функция  убывает. Если , то  и . По теореме о пределе и неравенствах , т. е. . Если , то  и снова . По теореме о пределе и неравенствах , т. е. .

*Теорема доказана*.

М16.3.2 *Замечание 1*. Даже у возрастающей функции в отдельных точках производная может обращаться в ноль. Простейшим примером служит возрастающая функция , имеющая в точке  нулевую производную. Возрастающая на всей числовой прямой функция  имеет бесконечно много точек, в которых производная равна нулю: .

|  |  |
| --- | --- |
| Возрастающие функции с нулевой производной | |
| 14.jpg | 15.jpg |

М16.3.3 *Замечание 2*. У возрастающей функции даже в конечном промежутке может оказаться бесконечное количество точек, в которых производная обращается в ноль. Рассмотрим функцию . Ее производная равна  и обращается в ноль в точках .

16.4 Исследование на экстремум с помощью первой производной

**М16.4.1 Определение:** Точка  называется точкой *максимума* функции, если найдется число  такое, что для любой другой точки  будет выполняться неравенство .

Точка  называется точкой *минимума* функции, если найдется число  такое, что для любой другой точки будет выполняться неравенство .

Точка  называется точкой *экстремума* функции, если она является точкой максимума или точкой минимума.

М16.4.2 Теорема (необходимое условие экстремума)

Если функция  имеет на промежутке  непрерывную производную и в точке  локальный экстремум, то 

*Схема доказательства:* Пусть в точке  функция  имеет локальный максимум. Тогда найдется число  такое, что на интервале  функция  возрастает, а на интервале  - убывает. Значит, на интервале  , а на интервале  . Поэтому, в силу непрерывности производной , эта производная в точке  не может быть ни положительной, ни отрицательной, значит, 

Для точки минимума аналогичными рассуждениями показывается, что и здесь . *Теорема доказана*.

М16.4.3 *Замечание 1.* Равенство нулю производной функции в некоторой точке еще не гарантирует наличие в ней экстремума, как показывает пример функции . Теорема М16.4.2 утверждает лишь, что в точках, в которых производная существует, но не равна нулю, экстремума точно нет.

М16.4.4 *Замечание 2.* Из теоремы М16.4.2 следует что экстремумы функции могут быть только в точках, в которых производная функции не существует или равна нулю. Из доказательства той же теоремы следует, что в точке будет экстремум, если при переходе через нее производная функции меняет знак.

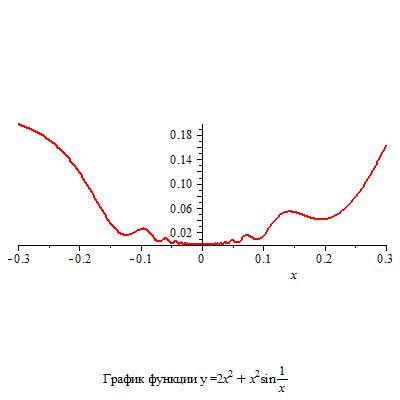
М16.4.5 С учетом теорем о необходимом условии экстремума и об аналитических признаках монотонности, алгоритм исследования функции на наличие экстремумов и нахождение промежутков возрастания и убывания функции состоит в следующем:

* найти область определения функции 
* найти производную функции и определить точки, в которых эта производная не существует или равна нулю (*критические точки*)
* отметить на области определения точки, найденные в предыдущем пункте. Эти точки разобьют область определения на интервалы, на каждом из которых производная сохраняет постоянный знак
* посчитать знак производной на каждом интервале: если , то на этом интервале функция  возрастает, если  - убывает
* если слева от критической точки , а справа - , то критическая точка является точкой максимума, если наоборот – точкой минимума. В остальных случаях критическая точка не является точкой экстремума.

М16.4.6Пример 1. Найти промежутки возрастания и убывания и экстремумы функции 

Областью определения функции является объединение промежутков . Поскольку , то . Производная не существует в точке , не входящей в область определения,  при . На каждом из интервалов  и  производная положительна и, значит, функция возрастает. На каждом из интервалов  и  производная отрицательна и, следовательно, функция  убывает. Точка  является точкой максимума, в ней значение функции равно –2 . Точка  есть точка максимума, в ней значение функции равно 2.

М16.4.7 Пример 2. Найти экстремумы функции .

*Решение.* . Производная функции нигде не равна нулю, но не существует в точке . При этом при положительных значениях переменной , а при отрицательных . Значит, в точке  у функции  максимум.

М16.4.8 *Замечание.* Даже на конечном промежутке функция может иметь бесконечно много точек экстремума. Примером может служить функция .

16.5 Исследование на экстремум с помощью второй производной

М16.5.1 В некоторых случаях при разыскании экстремумов исследование знака первой производной слева и справа от критической точки можно заменить исследованием второй производной в самой критической точке. Пусть функция  имеет в точке  первую и вторую непрерывные производные и . Если , то в силу непрерывности функции неравенство  будет выполняться на некотором интервале , значит, на этом интервале функция  возрастает и

,

но, поскольку , то  и . Значит, функция убывает на интервале  и возрастает на интервале  и - точка локального минимума.

Аналогично показывается, что если , то - точка локального максимума.

М16.5.2 Пример. Найти точки экстремума функции .

, значит, критические точки функции:  и .

. , , значит,  - точка максимума,  - точка минимума.

М16.5.3 *Замечание 1:* Если , то приведенное правило не дает ответа на вопрос об экстремуме и требуется дополнительное исследование. Кроме того, правило не применимо к точкам, в которых не существует производная .

Если в некоторой точке  имеют место равенства , но при этом , то в точке  экстремума нет. Если же , то следует найти четвертую производную . Если , то в точке  - максимум, если  - минимум. Если же , то считаем . При  экстремума нет, а при  считаем шестую производную и т.д. Доказать этот факт можно, используя ряд Тейлора функции  (конечно, если он существует и сходится к порождающей его функции).

16.6 Наибольшее и наименьшее значения функции

Для функций, непрерывных на отрезке  из *теоремы Вейерштрасса* следует, что наибольшее и наименьшее значения функции могут достигаться либо в точках экстремумов, либо на концах отрезка . Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений состоит в следующем:

1. находим первую производную  функции , определяем критические точки, принадлежащие интервалу ;
2. определяем значения функции в критических точках и на концах отрезка ;
3. выбираем наибольшее и наименьшее значения функции сравнением значений функции в критических точках и на концах интервала.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  на интервале .

*Решение.* , но . Вычисляем значения функции в точке  а также на концах интервала : , , . Вывод: наименьшее значение  достигается в точке , а наибольшее значение  достигается дважды: на каждом из концов рассматриваемого интервала.

Контрольные вопросы:

1. Что называется второй производной функции? Как определяются третья и последующие производные функции? Запишите формулу Лейбница.
2. Сформулируйте правило Бернулли-Лопиталя. Как применяется правило Бернулли-Лопиталя при различных видах неопределенностей?
3. Сформулируйте аналитический признак монотонности. Сформулируйте алгоритм поиска экстремумов функции с помощью первой производной.
4. Сформулируйте алгоритм поиска экстремумов функции с помощью повторных производных.
5. Сформулируйте алгоритм поиска наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.